

Anno Accademico 2020/2021

Docente Prof. Paolo MALERBA



CORSO DI LOGICA

PARTE PRIMA

- Introduzione alla Logica
- Logica dei predicati

Introduzione al Corso

Docenti:

Prof.ssa Laura Bazzotti

Prof. Paolo Malerba

- ▶ Questo corso ha lo scopo di insegnare elementi di base di logica e di tecniche di dimostrazione finalizzate alla programmazione.
- ▶ La logica e i calcoli su essa basati, le tecniche di dimostrazione appunto, giocano un ruolo fondamentale, anzi molti ruoli fondamentali nella programmazione. Il primo ruolo `e per la formalizzazione dei requisiti.
- ▶ Raramente un programmatore scrive un programma per risolvere un proprio problema. Di solito un programmatore (un team di programmatori) scrive un programma per risolvere un problema posto da altri. La fase di formalizzazione dei requisiti e quella in cui committente e programmatore concordano le caratteristiche attese per il programma da realizzare. è evidente che più precisi sono i requisiti e più certo sarà il risultato, ovvero più facile sarà la vita del programmatore e più sicura l'accettazione da parte del committente. La logica può aiutare molto in questa fase, consentendo di usare un **linguaggio non ambiguo e con una semantica (significato) ben preciso**. Un secondo uso della logica `e poi quello di poter dimostrare proprietà di programmi mediante l'uso di calcoli logici progettati allo scopo (p.e. la logica di Hoare). C'è poi il capitolo importantissimo della logica, o meglio di particolari logiche, usabili direttamente come linguaggi di programmazione, per esempio il linguaggio Prolog.

La Logica

- Il termine deriva dal greco λόγος (logos), e assume tradizionalmente una pluralità di significati: nel mondo classico sta ad indicare **la parola, il verbo, il discorso intorno a qualcosa**, più generalmente **il discorso razionale, la razionalità o la ragione**. Tecnicamente la logica (branca della filosofia) si occupa della correttezza sintattica del ragionamento.

Nel testo greco, lingua in cui è stato scritto negli anni a cavallo tra la fine del I e l'inizio del II secolo il Vangelo di Giovanni, leggiamo:

"In principio era il logos, e il logos era presso Dio, e il logos era Dio"
(Giovanni 1,1,18).

Giovanni l'Evangelista avendo avuto contatti con la filosofia greca, in questo passo intende sottolineare che all'inizio del tempo nulla esisteva tranne la razionalità e che essa stessa era divina.

Già Eraclito di Efeso (535 a.C.) aveva identificato nella razionalità la sostanza del mondo stesso. Con Giovanni il logos diviene progettualità per un mondo ordinato secondo ragione. Il Χάος (caos), realtà disordinata, cede il passo con questo Vangelo ad una realtà ordinata e armonica ovvero al κόσμος (cosmo).

Esiste un solo modo razionale di pensare ?

- La Logica occidentale (Grecia Classica)
- La Logica orientale (Taoista)

I PRINCIPI DELLA LOGICA OCCIDENTALE

- **il principio di identità; $P = P$** Non permette che l'oggetto di un discorso razionale o logicamente *valido* muti nel corso di questo.
- **il principio di non contraddizione; $\neg (P \wedge \neg P)$** Vieta la possibilità di affermare in un discorso razionale una proposizione e contemporaneamente la sua negazione.
- **il principio del terzo escluso; $(P \vee \neg P)$** Si tratta di un corollario del *principio di non contraddizione* utilizzato nelle dimostrazioni per assurdo stabilisce che date due proposizioni contraddittorie non possono essere né contemporaneamente vere né contemporaneamente false (principio di contraddizione), ma è necessario che una di esse sia vera e l'altro falsa, e che la falsità dell'una implichi necessariamente la verità dell'altra e viceversa, senza una «terza» possibilità (Tertium non datur).

La logica Taoista

3

- Il cerchio simbolizza la totalità (il **Tao** 道), le parti in bianco e nero gli opposti: lo **Ying** e lo **Yang**. Questi ultimi sintetizzano la totalità delle realtà contrapposte e antagoniste: il vuoto e il pieno, il concavo e il convesso, il maschile e il femminile, a luce e l'oscurità e così via.

Il Taoismo nega la legittimità del **principio di identità**: nel momento in cui si afferma un elemento non si può contemporaneamente non affermarne il suo contrario.

Nulla è completamente Ying e nulla è completamente Yang. Nell'uno è sempre presente il suo contrario contravvenendo **al principio di non contraddizione**.

In ultimo lo Ying si insinua nello Yang e viceversa mostrando come tra due opposti può sussistere un terzo elemento sostanziato dalla transizione graduale tra concetti e realtà soltanto in apparenza opposte.



4

Argomentazioni e inferenze

- Un'argomentazione è **un insieme di asserzioni** caratterizzato da una proposizione che si vuole dimostrare, la **tesi**, sostenuta dalle ragioni addotte per sostenerla contenute in proposizioni denominate **premesse**.



Con il termine **inferenza** intendiamo significare *qualsiasi sequenza finita di proposizioni di cui l'ultima è ottenuta come conclusione delle premesse*.

Lo **scopo** dell'inferenza è acquisire **nuova conoscenza**, quella contenuta nella conclusione, una volta assunto come acquisita quella contenuta nelle premesse.

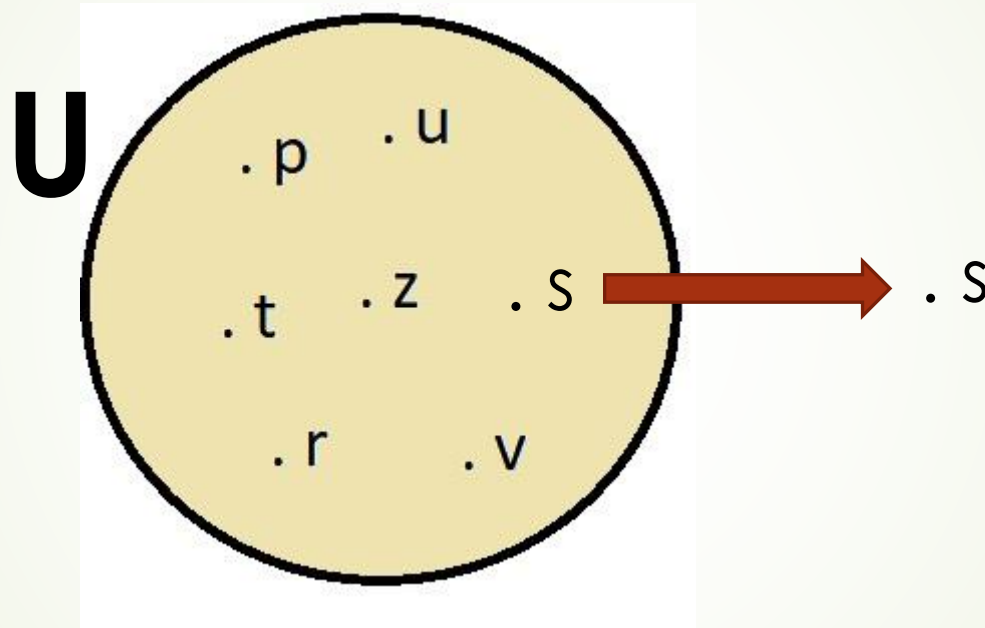
Per condurre un'argomentazione esistono due diversi modi:

- La deduzione
- L'induzione

5

Il metodo analitico e l'argomentazione deduttiva

Se da una premessa di carattere generale (es. *Tutti gli uomini sono mortali*) scaturisce una conclusione particolare (es. *Socrate è mortale*) allora l'argomentazione è detta **deduttiva**.



- ▶ Attraverso l'analisi di quanto compreso in un insieme **U** di proposizioni imparentate tra loro è possibile astrarre una proposizione particolare. Tale metodo è definito analitico e consente di passare **da conoscenze di carattere generale a conoscenze di carattere particolare**.

Su questo metodo si fondano i sistemi **ipotetico - deduttivi** come la geometria e la matematica

Limiti dell'argomentazione deduttiva

Premesso che:

- ▶ Tutti gli uomini sono mortali (premessa maggiore)
- e che
- ▶ Socrate è uomo (premessa minore)

si conclude necessariamente che **Socrate è mortale**

Cosa sappiamo di più nella conclusione che già non era già incluso nelle premesse?

Nulla

Socrate è mortale in quanto è elemento particolare appartenente all'insieme generale contenente tutti gli uomini mortali, d'altro canto la deduzione **non aumenta la conoscenza**, ma rende esplicito ciò che implicitamente già si conosceva.

Le conclusioni così ottenute esprimono un giudizio universale e necessario, ma non fecondo (cfr. Kant, Teoria dei giudizi).

La dimostrazione scientifica

► La **dimostrazione scientifica o sillogismo scientifico** (cfr. Aristotele, Analitici secondi) è un caso particolare di argomentazione deduttiva e soddisfa le seguenti condizioni:

1) Deve possedere **premesse vere**

Condizione relativa alla verità delle proposizioni a sostegno della tesi. La verità di una proposizione inerisce al suo significato, riguarda quindi gli **aspetti semantici** del discorso.

2) Le **conclusioni** scaturiscono necessariamente dalle premesse

Quest'ultima condizione è relativa alla correttezza del calcolo logico (correttezza delle inferenze), riguarda quindi esclusivamente gli **aspetti sintattici** della dimostrazione.

Quando una **conclusione vera** discende da **premesse vere** e quindi l'argomentazione dimostra la tesi, la **dimostrazione è scientifica** (cfr. Aristotele), distinguendosi dalle **dimostrazioni retoriche** fondate su opinioni e/o luoghi comuni accettati da tutti o dalla maggioranza.

Il metodo sintetico e l'argomentazione induttiva

- Se da premesse di carattere particolare (es. *Il cigno 1 è bianco, il cigno 2 è bianco... il cigno n è bianco*) scaturisce una conclusione generale (es. *Tutti i cigni sono bianchi*) allora l'argomentazione è detta **induttiva**.



L'induzione si fonda sulla **sintesi**, ovvero sul **riassunto delle conoscenze** derivate da eventi particolari in una proposizione generalizzante.

Il metodo sintetico è il metodo caratteristico delle scienze empiriche fondate sull'osservazione come ad esempio la fisica

Limiti dell'argomentazione induttiva

- Quale certezza ci fornisce l'induzione? Ovvero: **quanti** cigni bianchi dovrò vedere prima di asserire con certezza che **tutti** i cigni sono bianchi?



I limiti dell'induzione consistono nel fatto di non fornirci certezze assolute, ma soltanto provvisorie, d'altro canto l'induzione contribuisce ad **aumentare** la nostra conoscenza fino all'evidenza di un fatto contrario. Il giudizio a cui si perviene fornisce un giudizio fecondo, ma non universale.

Il ragionamento abduttivo e i suoi limiti

- Si tratta della classica **argomentazione per default**.

Esempio: *Normalmente i cinesi non sanno parlare italiano*

Lucy è cinese

Quindi *Lucy non sa parlare italiano.*

In questo tipo di ragionamento traiamo delle conclusioni particolari da una conoscenza generale che ammette eccezioni e la verità della 2° premessa discende dalla verità della 1° .
In mancanza di ulteriori informazioni siamo disposti a concludere che Lucy non parli italiano

Vediamo ora cosa accade se aggiungiamo alle premesse le seguenti:

Lucy ha frequentato le scuole dell'obbligo a Genova

Lucy è laureata in Letteratura italiana

Aumentando il numero delle premesse l'inferenza non è più corretta, diversamente per la **proprietà di monotonia delle inferenze** continuerebbe ad esserlo.

La logica si occupa di quei particolari tipi di ragionamento da cui dalla verità delle premesse scaturisce necessariamente la verità della conclusione

Deduzione, induzione e abduzione

► Si consideri il seguente esempio (Charles S. Peirce 1839 – 1914):

[1] *Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi*

[2] *Questi fagioli vengono da questo sacchetto*

[3] *Questi fagioli sono bianchi*

[1] *Questi fagioli vengono da questo sacchetto*

[2] *Questi fagioli sono bianchi*

[3] *Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi*

[1] *Tutti i fagioli di questo sacchetto sono bianchi*

[2] *Questi fagioli sono bianchi*

[3] *Questi fagioli vengono da questo sacchetto*

L'inferenza è logicamente corretta perché assunta la verità delle premesse segue la verità della conclusione

Il ragionamento è induttivo: si ottiene una legge generale dalla sua verifica in casi particolari (fino al *cigno nero*)

Il ragionamento è abduttivo: la legge generale giustifica il caso particolare (fino a che si venga a sapere che i fagioli bianchi non provengono da quel sacchetto - *Legge di monotonia*)

Negli ultimi due casi il ragionamento **non è logico** in quanto le conclusioni possono essere FALSE anche in presenza di premesse potenzialmente vere

Analisi e struttura di una argomentazione: *la parafrasi*

- Per analizzare un'argomentazione è necessario comprenderne la struttura attraverso una serie di operazioni:

La prima è la **parafrasi** allo scopo di semplificarne il contenuto ed esplicitarne la struttura

Si tratta di un'operazione complessa a causa dell'ambiguità e della ridondanza del linguaggio naturale, occorre quindi osservare alcuni passaggi:

- Divisione** dell'argomentazione in enunciati autonomi indipendenti, svelando eventuali nidificazioni
- Eliminazione** di tutte le espressioni ridondanti che non pregiudicano la comprensione del testo
- Sostituzione** delle espressioni figurate o oscure con altre di uso comune

Analisi e struttura di una argomentazione: *la tesi*

- ▶ Nelle argomentazioni condotte nel linguaggio naturale nei contesti di vita quotidiana (giornali, discussione tra amici, dibattiti televisivi, disquisizioni in famiglia, ecc.) abbondano ***incisi, divagazioni, ripetizioni, figure retoriche, modi di dire, enfasi, espressioni figurate, espressioni oscure.***

Per queste ragioni il linguaggio naturale non permette un'immediata e chiara individuazione della tesi.

SUGGERIMENTI per l'individuazione della tesi:

- La tesi è spesso preceduta da espressioni tipo: ***quindi, perciò, ne segue che, di conseguenza, in conclusione, ne deriva che, per cui...***
- Non sempre si trova al termine dell'argomentazione, talvolta si trova **all'inizio** o nel **mezzo** stesso dell'argomentazione .
- A volte la tesi è implicita e si individua solo dal **senso del contesto**.

Analisi e struttura di una argomentazione: *le premesse*

- ▶ Le premesse sono funzionali all'accettazione della tesi: se le accettiamo occorre conseguentemente accettare anche la conclusione.
Occorre quindi, una volta individuate le premesse, domandarsi se ognuna di esse contribuisce o meno a fare accettare la tesi. In caso contrario l'enunciato è estraneo all'argomentazione.

SUGGERIMENTI per l'individuazione delle premesse:

- Le premesse sono spesso precedute da espressioni tipo: ***infatti, poiché, dal momento che, dopotutto...***
- Sono spesso elencate: ***in primo luogo, in secondo luogo, da una parte... dall'altra, inoltre, infine***
- A volte sono precedute da ***tuttavia, a dispetto di tutto ciò, nonostante che...***
- A volte sono **implicite**, perché ovvie o perché si vuole farle credere appellandosi al senso comune

La logica dei predicati

- Le proposizioni che si possono utilizzare nella logica dei predicati sono le **proposizioni apofantiche o dichiarative** le quali affermano qualcosa sulla realtà attribuendo un predicato ad un soggetto.

Esempio: *Giuseppe sta andando al cinema*

In questo caso si predica al soggetto *Giuseppe* l'*andare al cinema*.

Se nella realtà Giuseppe sta andando veramente al cinema la proposizione è **VERA** altrimenti la proposizione è **FALSA**.

	AFFIRMATIVE	NEGATIVE
UNIVERSALI	Tutti gli A sono B	Tutti gli A non sono B Equivale Nessun A è B
PARTICOLARI	Qualche A è B Equivale Esiste almeno un A che è B	Qualche A non è B Equivale Esiste almeno un A che non è B
SINGOLARI	Il re di Francia è calvo	Il re di Francia non è calvo

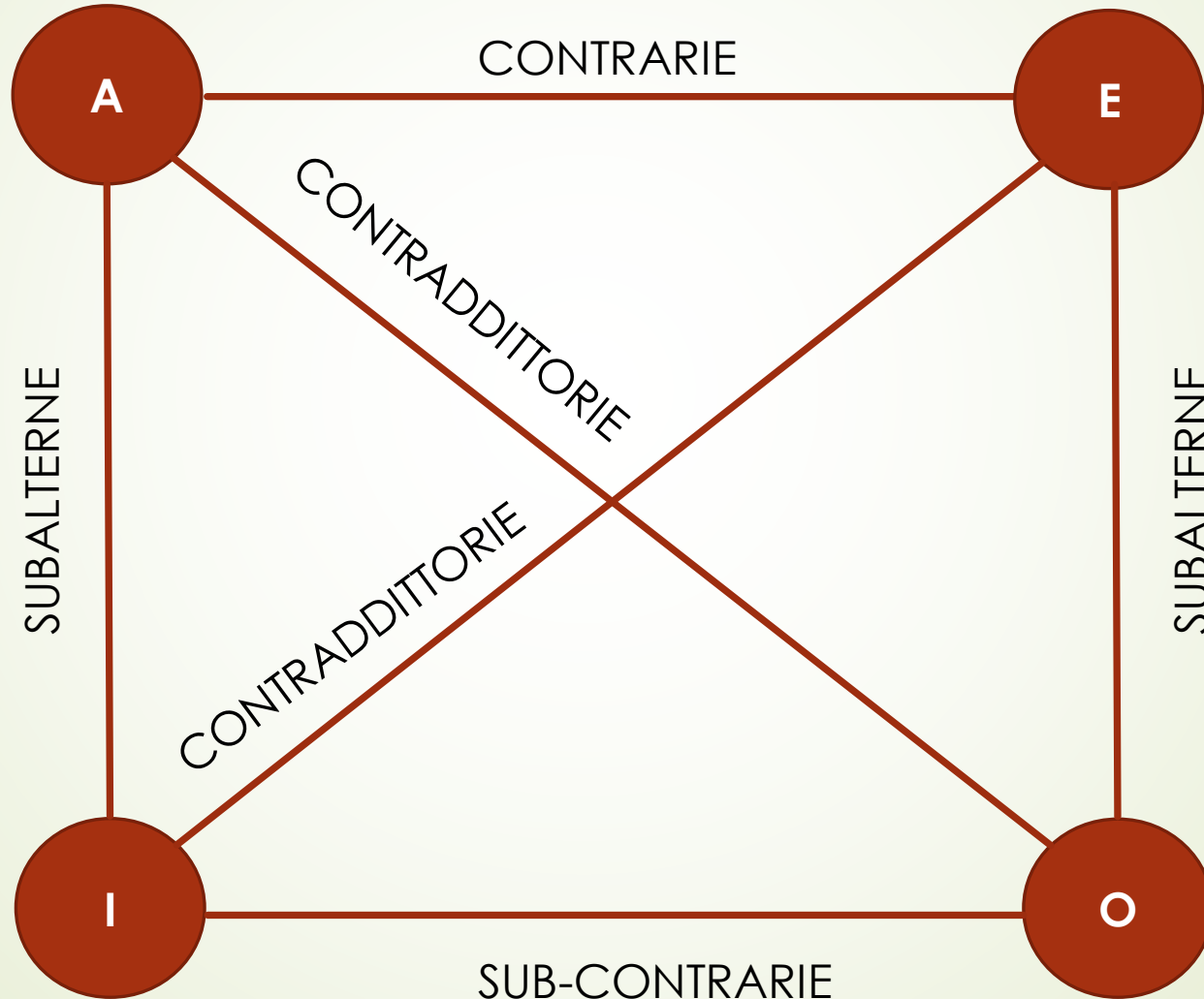
Le relazioni tra le proposizioni

Tutti gli A sono B
Universale affermativa

Adfirmo

adf**I**rmo

Qualche A è B
Particolare affermativa



Nessun A è B
Universale negativa

n**E**go

neg**O**

Qualche A non è B
Particolare negativa

Il sillogismo

- La logica aristotelica (sillogistica) fonda la validità delle argomentazioni sul rapporto di inclusione tra i predicati che compongono le premesse e la conclusione dell'argomentazione.

Le proposizioni che fungono da premesse, una detta **premessa maggiore** e l'altra **premessa minore** hanno in comune un termine detto **termine medio** (nell'esempio che segue in rosso)

Tutti gli **animali** sono **mortali**

Premessa maggiore

gli **uomini** sono **animali**

Premessa minore

gli **uomini** sono **mortali**

Conclusione

Cosa è successo?

Nella conclusione il termine medio in comune tra le premesse (nell'esempio in rosso) è scomparso, il soggetto della premessa minore è diventato il soggetto della conclusione e il predicato della premessa maggiore è diventato predicato nella conclusione. Questo tipo di sillogismo è definito di **prima figura**.

Le figure del sillogismo

18

La posizione del termine medio **M** rispetto al predicato **P** nella premessa maggiore e al soggetto **S** nella premessa minore determina la **figura** (il tipo) di sillogismo.

Prima figura

MP Tutti gli **uomini** sono **intelligenti**

SM Tutti i **cretesi** sono **uomini**

SP Tutti i **cretesi** sono **intelligenti**

Premessa maggiore Universale e premessa minore affermativa

Terza figura

MP Tutte le **api** sono **insetti**

MS Tutte le **api** sono **animali alati**

SP Alcuni **animali alati** sono **insetti**

Il termine medio è soggetto due volte nelle premesse. La premessa minore deve essere affermativa.

Seconda Figura

PM Nessuna **pietra** è **animale**

SM Tutti gli **uomini** sono **animali**

SP Nessun **uomo** è **pietra**

Premessa maggiore Universale e una premessa negativa. Il termine medio funge due volte da predicato.

Quarta figura

PM Tutti i **cani** sono **animali**

MS Tutti gli **animali** sono **esseri viventi**

SP Alcuni **esseri viventi** sono **cani**

Il termine medio funge da predicato nella premessa maggiore e soggetto nella minore (Galeno)

I modi delle figure

- I termini di una proposizione possono presentarsi secondo quattro forme diverse: universale/particolare e affermativa/negativa

Ciascuna figura ha tre proposizioni che possono assumere quattro forme (vedi sopra), per cui ogni figura può assumere 64 schemi sillogistici o **modi** (4 per la premessa maggiore, 4 per la premessa minore e 4 per la conclusione)

Poiché le figure sono quattro ed ogni figura ha 64 possibili modi esistono ben 256 possibili combinazioni sillogistiche.

La maggior parte delle 256 possibili combinazioni non produce argomentazioni (ragionamenti) valide (corrette sintatticamente)

I modi validi


Prima figura	Seconda figura	Terza figura	Quarta figura
Barbara	Cesare	Derapti	Bramantip
Celarent	Camestres	Felapton	Camenes
Darii	Festino	Disamis	Dimaris
Ferio	Baroco	Datisi	Fresapo
		Bocardo	Fresison
		Feriso	

Universale affermativa **a**dfirmo

Particolare affermativa adfirmo

Universale negativa **n**ego

Particolare negativa nego



Grazie per l'attenzione